الوحدة التخيلية والعدد المركب

- الوحدة التخيلية: $i = \sqrt{-1}$.
- الجذور التربيعية للأعداد الحقيقية السالبة ..

$$\sqrt{-b^2} = \sqrt{b^2} \times \sqrt{-1} = bi$$

- بعض قوى الوحدة التخيلية ..

$$i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1 \qquad i^3 = -i$$

$$i^4 = 1 \qquad i^{(\text{أي عدد من مضاعفات 4})} = 1$$

- مثال توضيحي ..

$$i^{17} = i^{16+1} = i^{16} \times i = 1 \times i = i$$

- العدد المركب يُكتب على الصورة ..

$a + bi$ الجزء التخيلي ، الجزء الحقيقي

- مثال توضيحي: العدد $5 + 3i$ يُسمى عددًا مركبًا.
- نوجد $(1+i)^6$ كالتالي ..

$$\begin{aligned}(1+i)^6 = [(1+i)^2]^3 &= [(1+2i+i^2)]^3 \\ &= [1+2i+(-1)]^3 \\ &= [2i]^3 = 2^3 \times i^3 \\ &= 8(-i) = -8i\end{aligned}$$

$$\boxed{(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$$

$\frac{01}{6}$ ◄ تبسيط العدد $\sqrt{-36}$ هو ..

Ⓐ -6 Ⓑ $-6i$

Ⓒ $6i$ Ⓓ 6

02
6

قيمة i^{12} تساوي ..

Ⓐ -1

Ⓑ 1

Ⓒ i

Ⓓ $2i+1$

03
6

◀ قيمة $i^{15} + i^{14} + i^{13} + i^{12}$ تساوي ..

Ⓐ 0 Ⓑ 1

Ⓒ $2i$ Ⓓ $2i + 1$

$\frac{04}{6}$ ◀ ناتج ضرب $5i \times 2i$ يساوي ..

Ⓐ -10

Ⓑ $-10i$

Ⓒ $10i$

Ⓓ 10

05/6 ◀ أوجد قيمة $(1 - i)^8$.

Ⓐ 16 Ⓑ -16

Ⓒ $16i$ Ⓓ $-16i$

العمليات على الأعداد المركبة

- لتبسيط عبارة تحوي أعدادًا مركبة نبسط الجزء الحقيقي مع الحقيقي والتخيلي مع التخيلي، فمثلًا ..

$$(5 - 7i) + (2 + 4i) = (5 + 2) + (-7 + 4)i$$
$$= 7 - 3i$$

- **مرافق العدد المركب:** مرافق $2 + 3i$ هو $2 - 3i$.
- **تنبيهان ..**
  - العدد الحقيقي عدد مركب.
  - مرافق العدد الحقيقي هو نفسه.
- **ضرب عددين مركبين مترافقين ..**

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2$$

- لتبسيط كسر مقامه عدد مركب نضرب في مرافق المقام بسطًا ومقامًا.
- **مثال:** قيمة $\frac{3i}{2i-4}$ تساوي ..
  - **الحل:** نضرب في مرافق المقام بسطًا ومقامًا ..

$$\frac{3i}{2i - 4} \cdot \frac{-2i - 4}{-2i - 4} = \frac{3i(-2i - 4)}{2^2 + 4^2} = \frac{6 - 12i}{4 + 16}$$
$$= \frac{6 - 12i}{20} = \frac{6}{20} - \frac{12i}{20} = \frac{3}{10} - \frac{3}{5}i$$

$\frac{06}{6}$ ◀ المقدار $(2+3i)(1-2i)$ يساوي ..

Ⓐ $8-7i$ Ⓑ $6-2i$

Ⓒ $-4-i$ Ⓓ $8-i$

07
6

ما ناتج ضرب العددين المركبين $(2+6i)(2-6i)$ ؟

Ⓐ -32

Ⓑ $4-6i$

Ⓒ 40

Ⓓ $4-36i$

$\frac{08}{6}$ ◀ تبسيط العبارة $(4+6i)-(-1+2i)$ ..

Ⓐ $-4i$ Ⓑ $5+4i$

Ⓒ 5 Ⓓ $4i$

$\frac{09}{6}$ ◀ تبسيط العبارة $\frac{i-1}{2i}$ ..

Ⓐ $\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$

Ⓑ $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

Ⓒ $\frac{-1}{2}-\frac{1}{2}i$

Ⓓ $-\frac{1}{2}i$

تساوي عددين مركبين

◂ **العددان المركبان المتساويان فيهما ..**

الجزءان الحقيقيان متســــاويان، والجزءان التخيليان متساويان، فمثلًا ..

$$x + 6i = 3 - 2yi$$

$$\Rightarrow \quad x = 3 \ , \ 6 = -2y \quad \Rightarrow \quad y = -3$$

$\frac{10}{6}$ ◄ ما قيمتا x, y الحقيقيتان اللتان تجعلان المعادلة التالية صحيحة؟

$$(5 + 4i) - (x + yi) = -1 - 3i$$

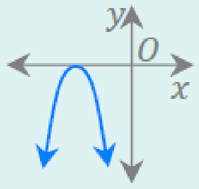
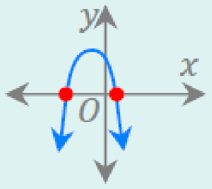
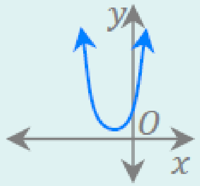
Ⓐ $x = 6 \ , \ y = 7$ Ⓑ $x = 5 \ , \ y = 4$

Ⓒ $x = 4 \ , \ y = 5$ Ⓓ $x = 4 \ , \ y = 7$

القانون العام والمميز

◀ للمعادلة التربيعية $\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$ ..

◀ **المميز:** $b^2 - 4ac$ يحدد نوع الجذرين (الحلين) ..

$b^2 - 4ac = 0$ للمعادلة جذر حقيقي واحد مكرر مرتين	
$b^2 - 4ac > 0$ للمعادلة جذران حقيقيان مختلفان	
$b^2 - 4ac < 0$ للمعادلة جذران مركبان مترافقان	

◀ **فائدة:** جذور المعادلة تعني حلول المعادلة.

◀ **مثال توضـــيحي:** للمعادلة $x^2 - 6x + 10 = 0$

نُحدد قيمة المميز وأنواع الجذور كالتالي ..

$$a = 1 \; , \; b = -6 \; , \; c = 10$$

$$\text{المميز} = b^2 - 4ac = (-6)^2 - 4(1)(10)$$

$$= 36 - 40 = -4 < 0 \; (\text{سالب})$$

$\therefore$ للمعادلة جذران مركبان

- **تنبيه:** تأكد قبل الحل أن المعادلة على الصورة القياسية.
- حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هو ..

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{أو} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{\text{المميز}}}{2a}$$

$\frac{11}{6}$ ◀ **قيمة المميز للمعادلة $x^2 - 3x = 0$ تساوي ..**

Ⓐ 5 Ⓑ 6

Ⓒ 8 Ⓓ 9

12/6 ◄ إذا كان ناتج المميز $b^2 - 4ac$ سالبًا فإن جذريه ..

Ⓐ متساويان

Ⓑ حقيقيان نسبيان

Ⓒ حقيقيان غير نسبيين

Ⓓ تخيّليان

13/6 إذا كان للمعادلة $x^2 + bx + 9$ جذران مركبان؛ فأوجد قيمة b .

Ⓐ 5

Ⓑ 6

Ⓒ 7

Ⓓ 8

14/6 أي المعادلات التالية له جذر حقيقي مكرر مرتين؟

Ⓐ $x^2 = 19$

Ⓑ $x^2 - 8x = -16$

Ⓒ $x^2 - 2x - 5 = 0$

Ⓓ $x^2 - 2x + 5 = 0$

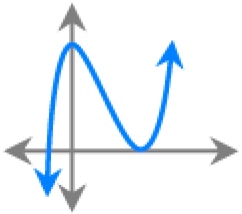
15/6 ◀ **أوجد حل المعادلة $x^2 - 6x = -10$ في مجموعة الأعداد المركبة.**

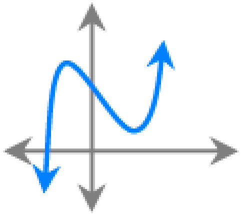
Ⓐ $1 \pm i$ Ⓑ $3 \pm i$

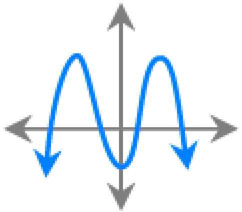
Ⓒ $1 \pm 3i$ Ⓓ ليس لها حل

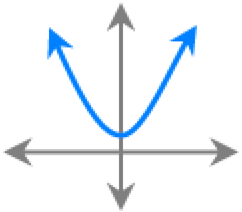
16
6

◄ أي الدوال التالية له جذر حقيقي مكرر مرتين؟

Ⓐ 

Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

تبسيط العبارة الجبرية

- **درجة وحيدة الحد:** تســاوي أس المتغير، أو مجموع أسس متغيراتها إذا احتوت على أكثر من متغير.
- **مثال توضــيحي:** وحيدة الحد $2x^2y^3$ من الدرجة الخامسة $(3 + 2)$، وأيضًا فإن وحيدة الحد $3x^5$ من الدرجة الخامسة.

تتمة تبسيط العبارة الجبرية

- $a^m \div a^n = a^{m-n}$.
- $a^m \times a^n = a^{m+n}$.
- $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$.
- **مثال توضيحي:** نُبسط العبارة الجبرية $(2x^{-3}y^3)(-7x^5y^{-6})$ كالتالي ..

$$(2x^{-3}y^{3})(-7x^{5}y^{-6}) = -14(x^{-3+5})(y^{3-6})$$
$$= -14x^2y^{-3}$$

$$\boxed{x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)}$$

$\frac{17}{6}$ ◀ أي وحيدات الحد التالية درجته تساوي درجة وحيدة الحد $7n^3m^2$ ؟

Ⓐ $7nm$ Ⓑ $2n^5m$

Ⓒ $3nm^4$ Ⓓ $5n^3m$

$\frac{18}{6}$ ◄ المقدار $\frac{2a^2b^2}{6ba^5}$ يساوي ..

Ⓐ $3a^7b^4$

Ⓑ $\frac{b}{3a^3}$

Ⓒ $4\frac{b^5}{a^6}$

Ⓓ $3a^7b^2$

$\frac{19}{6}$ ◀ تبسيط المقدار $\frac{9b^2}{a-b} \times \frac{a^2-b^2}{3b}$ يساوي ..

Ⓐ $3b(a+b)$ Ⓑ $3(a+b)$

Ⓒ $9a^2b^4 - 9b^4$ Ⓓ $3b(a-b)$

كثيرة الحدود

- **درجة كثيرة الحدود:** هي درجة وحيدة الحد ذات الدرجة الأعلى، والمعامل الرئيس لكثيرة الحدود هو معامل الحد الذي له أكبر أس فيها.
- **مثال توضيحي:** كثيرة الحدود $2x^2y^3 - 3y^2 + 5$ من الدرجة الخامسة $(3 + 2)$ ، ومعاملها الرئيس 2 .
- **كثيرة الحدود الأولية:** هي التي لا يمكن تحليلها.
- **مثال توضيحي:** كثيرة الحدود $3x^2 + 5x$ ليست أولية لأنه يمكن تحليلها إلى الشكل $x(3x + 5)$.

$\frac{20}{6}$ أيّ كثيرات الحدود التالية من الدرجة الثالثة؟

Ⓐ $x^3 + x^2 - 4x^4$

Ⓑ $-2x^2 - 3x + 4$

Ⓒ $x^2 + x + 12^3$

Ⓓ $1 + x + x^3$

$\frac{21}{6}$ ◄ المعامل الرئيس لكثيرة الحدود $x - 3x^2 - 2x^4$ يساوي ..

Ⓐ -3 Ⓑ 2

Ⓒ 4 Ⓓ 12

22/6 ◄ أيّ كثيرات الحدود التالية كثيرة حدود أولية؟

Ⓐ $2x + 4$

Ⓑ $x^2 - y^2$

Ⓒ $3x - 7$

Ⓓ $3x^2 - 7x$

العمليات على كثيرات الحدود

- نستعمل خاصية التوزيع للتبسيط.
- نتخلص من الأقواس، ثم نجمع الحدود المتشابهة.
- $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$.
- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، بشرط $g(x) \neq 0$.
- لتحليل المقدار $x^2 + bx + c$ إلى عوامل نبحث عن عددين مجموعهما b وحاصل ضربهما c ، وليكن العددان m,n ؛ فيكون التحليل ..

$$x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$$

فمثلًا ..

$$x^2 + 4x - 5 = (x + 5)(x - 1)$$

∴ عوامل $x^2 + 4x - 5$ هي $(x + 5)$ و $(x - 1)$

- **مثال:** أوجد ناتج $(x^2 - 3x + 2) \div (x - 2)$.
  - **الحل:**

$$\frac{x^2 - 3x + 2}{x - 2} = \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)} = (x - 1)$$

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

فائدة: لتحليل كثيرة حدود لها أربعة حدود أو أكثر نستخدم التحليل بالتقسيم، فمثلًا ..

$$8y^5 - 16y - 2y^4 + 4$$
$$= (8y^5 - 2y^4) + (-16y + 4)$$
$$= 2y^4(4y - 1) - 4(4y - 1)$$
$$= (4y - 1)(2y^4 - 4)$$
$$= 2(4y - 1)(y^4 - 2)$$

مساحة المستطيل = الطول × العرض

23
6

أي التالي يكافئ $\left(x^2 - x\right) + \left(-x^2 + 3x + 4\right)$ ؟

Ⓐ 4

Ⓑ $x - 1$

Ⓒ $2x + 4$

Ⓓ $2x^2 - 4x + 4$

24/6 ◀ أي التالي يكافئ $(-4x^2 + 2x + 3) - 3(2x^2 - 5x + 1)$ ؟

Ⓐ $2x^2$

Ⓑ $-10x^2$

Ⓒ $2x^2 + 17x$

Ⓓ $-10x^2 + 17x$

$\frac{25}{6}$ ◀ العبارة $\boldsymbol{y^{-1}(y^3+y)}$ في أبسط صورة تساوي ..

Ⓐ $3y-1$

Ⓑ $y-4$

Ⓒ y^2+1

Ⓓ y^2-y

26
6

◀ إذا كان $x^2 - y^2 = 24$ و $x + y = 8$ ؛ فما قيمة $x - y$ ؟

Ⓐ 3 Ⓑ 4

Ⓒ 9 Ⓓ 16

$\frac{27}{6}$ إذا كانت $g(x) = x - 2$ و $f(x) = 5x + 10$ ؛ فإن مجال الدالة $\left(\frac{f}{g}\right) \times \left(\frac{g}{f}\right)(x)$ يساوي ..

Ⓐ مجموعة الأعداد الحقيقية
Ⓑ $\{x | x \neq -2\}$
Ⓒ $\{x | x \neq 2, x \neq -2\}$
Ⓓ $\{x | x \neq -2, x \neq -5\}$

$\frac{28}{6}$ ◀ أي التالي يكافئ العبارة $(x^2 + x - 12)(x - 3)^{-1}$ ؟

Ⓐ $x + 3$

Ⓑ $x + 4$

Ⓒ $-x - 4$

Ⓓ $-x - 3$

$\frac{29}{6}$ ◀ ناتج قسمة $(x+2) \div (x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 3x + 2)$ يساوي ..

Ⓐ $x^2 - 2x + 1$ Ⓑ $x^3 - 2x^2 + 1$

Ⓒ $x^3 - 2x + 1$ Ⓓ $x^3 - 2x^2 + x$

30/6 ◀ ما طول مستطيل مساحته $3x^2 + 2x - 8$ وعرضه $x + 2$ ؟

Ⓐ $3x - 2$

Ⓑ $3x + 2$

Ⓒ $3x - 4$

Ⓓ $3x + 4$

نظرية الباقي

- **النظرية:** إذا قُسمت كثيرة الحدود $f(x)$ على $(x-r)$ فإن باقي القسمة مقدار ثابت يساوي $f(r)$.
- **مثال توضيحي:** باقي قسمة $f(x) = x^3 + x^2 - 3$ على $x - 1$ يساوي $f(1)$ ..

$$\text{باقي القسمة} = f(1) = (1)^3 + (1)^2 - 3$$
$$= 1 + 1 - 3 = -1$$

$\frac{31}{6}$ ◄ أي التالي إذا قسمنا عليه $f(x) = x^2 - 5x + 7$ كان الباقي 3 ؟

Ⓐ $x - 4$

Ⓑ $x - 2$

Ⓒ $x + 2$

Ⓓ $x + 3$

$\frac{32}{6}$ ◄ إذا كان باقي قسـمة $f(x) = x^3 + kx + 3$ على $x + 2$ يسـاوي 1 ؛
فما قيمة k ؟

Ⓐ -3

Ⓑ -2

Ⓒ -1

Ⓓ 3

عوامل كثيرة الحدود

◂ **العوامل**: إذا كان r صفرًا لـ $f(x)$ أي إذا كان $f(r) = 0$ فإن $(x - r)$ عامل من عوامل $f(x)$.

◂ **مثال**: أي التالي أحد عوامل كثيرة الحدود $f(x) = -x^3 + 4x^2 - x - 6$ ؟

Ⓐ $x - 2$ Ⓑ $x + 3$

Ⓒ $x - 1$ Ⓓ x

◂ **الحل**: إذا كان $(x - r)$ عاملًا من عوامل $f(x)$ فمعنى ذلك أن $f(r) = 0$ ، وبتجربة الخيارات ..

Ⓐ $x - 2$ ..

$$f(2) = -(2)^3 + 4(2)^2 - (2) - 6$$

$$= -8 + 4 \times 4 - 8$$

$$= -8 + 16 - 8 = 0$$

33
6

◄ أي التالي أحد عوامل كثيرة الحدود $f(x) = x^3 - 7x^2 + 7x + 15$ ؟

Ⓐ $x + 1$

Ⓑ $x + 2$

Ⓒ $x + 3$

Ⓓ $x + 5$

$\frac{34}{6}$ ◀ أي التالي أحد عوامل كثيرة الحدود $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - x + 2$ ؟

Ⓐ $x - 3$

Ⓑ $x + 3$

Ⓒ $x - 2$

Ⓓ $x + 2$

$\frac{35}{6}$ ◀ أي التالي <u>ليس</u> عاملاً لكثيرة الحدود $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$ ؟

Ⓐ x

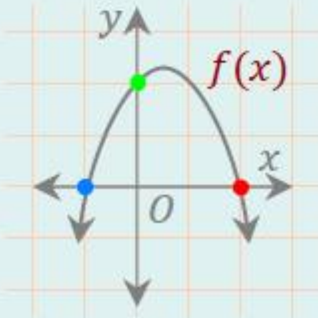
Ⓑ $x - 1$

Ⓒ $x + 1$

Ⓓ $x - 2$

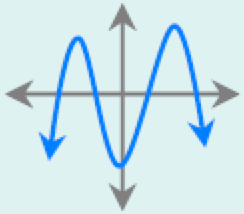
جذور (أصفار) كثيرة الحدود

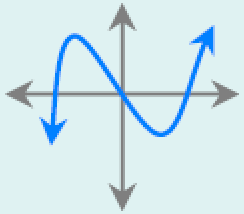
- **الأصـفار:** نقول عن c إنه صـفر من أصـفار كثيرة الحدود $f(x)$ إذا كان $f(c) = 0$.
- لإيجاد أصفار $f(x)$ نساويها بالصفر ونوجد قيم x .
- **الأصـــفار الحقيقية بيانيًا:** نقاط تقاطع $f(x)$ مع محور x .
- **تحديد أصفار وعوامل $f(x)$ من الرسم ..**
  - الأصفار هي 2 , -1 .
  - نغير إشارات الأصفار، ونضـعها بعد x فنحصـل على العوامل ..

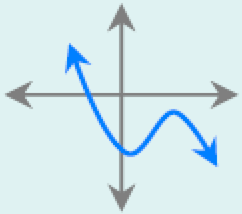


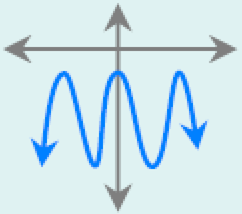
$(x + 1)$, $(x - 2)$

مثال: التمثيل البياني للدالة التي لها 3 أصـــفار حقيقية هو ..

Ⓐ 

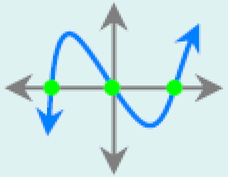
Ⓑ 

Ⓒ 

Ⓓ 

الحل: بالنظر للخيارات نجد أن الخيار Ⓑ هو الصحيح لأن ..

منحنى $f(x)$ يقطع محور x في ثلاث نقاط، ومنه فإن الدالة لها 3 أصفار حقيقية.



36/6 ◄ أي التالي من أصفار $f(x) = x^2 + 5x + 6$ ؟

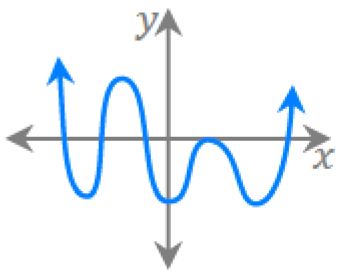
Ⓐ -3

Ⓑ 0

Ⓒ 2

Ⓓ 5

37/6 ◀ في التمثيل البياني أوجد عدد الأصـــــفار الحقيقية للدالة.



Ⓐ 3 Ⓑ 4

Ⓒ 6 Ⓓ 7

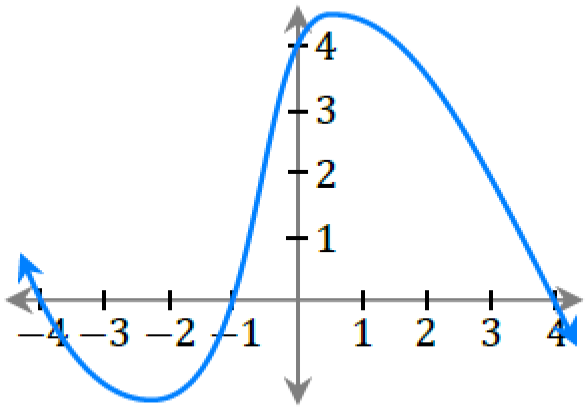
38 ◄ أي الفترات التالية يوجد بها أصفار حقيقية للدالة $f(x) = x^2 - 4x - 5$ ؟

6

Ⓐ $[-4, -3]$ Ⓑ $[0, 1]$

Ⓒ $[4, 6]$ Ⓓ $[6, 8]$

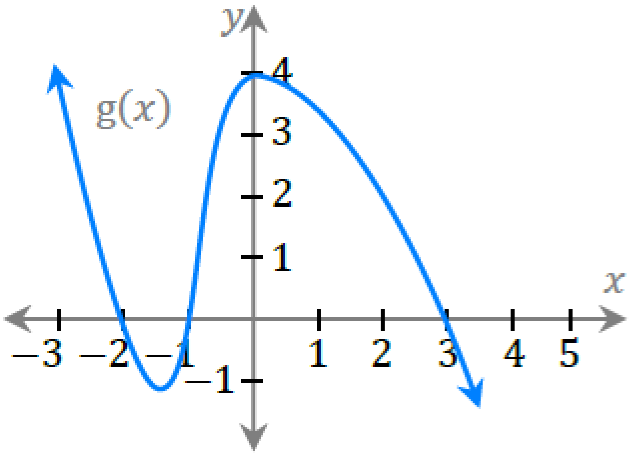
$\frac{39}{6}$ ◀ أي التالي **ليس** من عوامل كثيرة الحدود $f(x)$ ؟



Ⓐ $x+4$ Ⓑ $x+1$

Ⓒ $x-4$ Ⓓ $x-1$

$\frac{40}{6}$ أوجد أصفار الدالة التي تقع في الفترة $[2,5]$.



Ⓐ 4 Ⓑ 3

Ⓒ −1 Ⓓ −2

الأصفار (الجذور) المركبة المترافقة

- **نظرية:** يكون لمعادلة كثيرة الحدود من الدرجة n العدد n فقط من الجذور المركبة.
  - **مثال توضيحي:** $(-2x^5 - 3x + 8)$ لها 5 جذور مركبة.
- إذا كان العدد المركب $(a + ib)$ صفرًا لدالة كثيرة حدود فإن مرافقه $(a - ib)$ صفر للدالة أيضًا.
  - **مثال توضيحي:** إذا كان $(3 + 2i)$ صفرًا لدالة كثيرة الحدود $f(x)$ فإن $(3 - 2i)$ صفر لـ $f(x)$ أيضًا.

41/6 ◀ عدد الجذور المركبة لكثيرة الحدود $f(x) = 3x^5 + 2x^3 - 5x + 1$ يساوي ..

(A) 2	(B) 3
(C) 4	(D) 5

42/6 ◄ عدد الجذور المركبة لكثيرة الحدود $f(x) = x^4 - 8$ يساوي ..

Ⓐ 0

Ⓑ 4

Ⓒ 8

Ⓓ 12

$\frac{43}{6}$ ◀ كثيرة حدود من أصفارها العددان $(1 + 2i)$ و -1 ، ما أقل درجة ممكنة لها؟

Ⓐ الأولى
Ⓑ الثانية
Ⓒ الثالثة
Ⓓ الرابعة