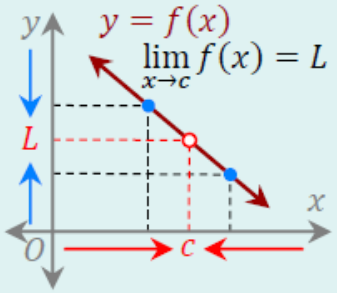
تقدير النهايات بيانيًا



النهـايـة من اليمين $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_1$: تعني قيمة الدالة عند اقتراب قيم x من العدد c من اليمين.

النهاية من اليسار $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_2$: تعني قيمة الدالة عند اقتراب قيم x من العدد c من اليسار.

النهاية عند نقطة ..

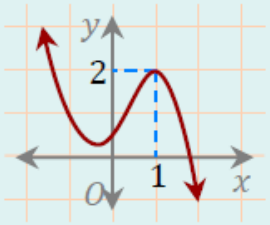
إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) = \lim_{x \to c^-} f(x) = L$

فإن $\lim_{x \to c} f(x) = L$

إذا كانت $\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$

فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

مثـال توضـــيحي: من الشكل ..



$\lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$

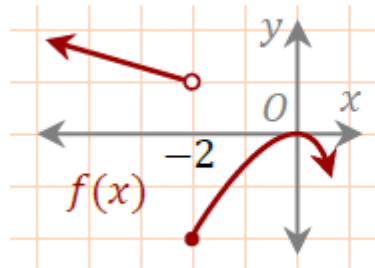
و $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2$

وبما أن ..

$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^-} f(x)$ فإن $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$

01
16

في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to -2} f(x)$ بـ ..



Ⓐ -2

Ⓑ 0

Ⓒ 1

Ⓓ غير موجودة

02/16

إذا كان $\lim_{x \to 3^+} f(x) = 5$ و $\lim_{x \to 3^-} f(x) = -5$ و $f(3) = 7$ ؛ فما قيمة $\lim_{x \to 3} f(x)$ ؟

Ⓐ 3

Ⓑ 5

Ⓒ 7

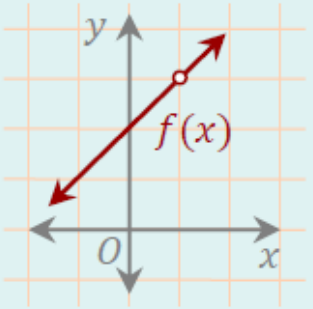
Ⓓ غير موجودة

النهايات والاتصال عند نقطة

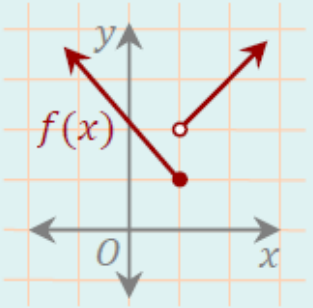
تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = a$ إذا كان ..

$$f(a) = \lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = L$$

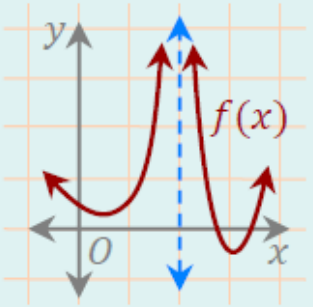
أنواع عدم الاتصال ..



قابل للإزالة: الدالة متصلة عند كل نقطة في مجالها باستثناء نقطة واحدة، ويشار إليها بدائرة صغيرة (○) .

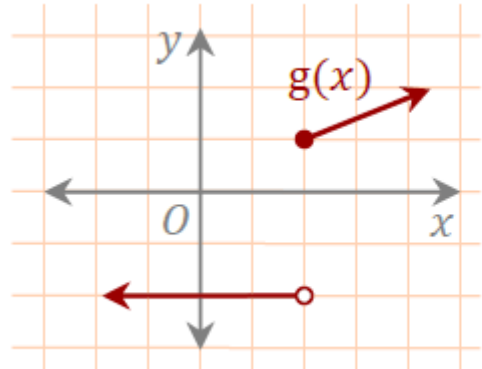


قفزي: نهايتا الدالة عندما تقترب من نقطة عدم الاتصال من اليمين واليسار موجودتين لكنهما غير متساويتين.



لا نهائي: تتزايد قيم الدالة أو تتناقص بلا حدود عندما تقترب الدالة من نقطة عدم الاتصال من اليمين أو اليسار.

03/16 في الشـــكل ما نوع عدم الاتصـــال للدالة $g(x)$ عند النقطة $x = 2$ ؟



Ⓐ انفصالي
Ⓑ لا نهائي
Ⓒ قفزي
Ⓓ قابل للإزالة

04/16 إذا كانت $f(x)=\begin{cases}2x^2+a & , x\geq 2\\ x+5 & , x<2\end{cases}$ متصلة عند $x=2$ فما قيمة a ؟

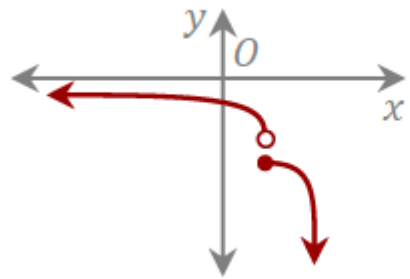
Ⓐ -2

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ 3

05/16 ما نوع عدم الاتصال للدالة؟



Ⓐ لا نهائي
Ⓑ نقطي
Ⓒ قفزي
Ⓓ قابل للإزالة

06/16 الدالة $f(x)=\frac{1}{x-2}$ غير متصلة عند $x=2$ ؛ ما نوع عدم الاتصال؟

Ⓐ لا نهائي

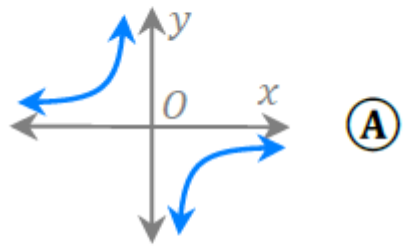
Ⓑ نقطي

Ⓒ قفزي

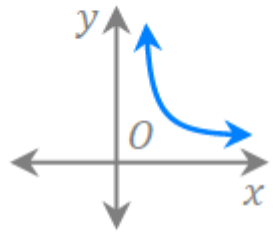
Ⓓ قابل للإزالة

07/16

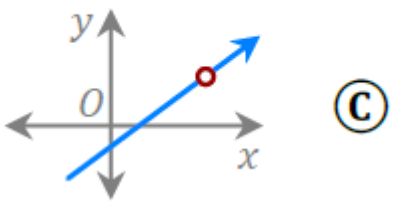
أي التمثيلات البيانية التالية يُمثل دالة عدم اتصال لا نهائي؟



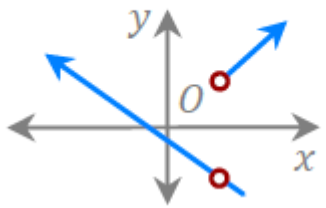
A



B



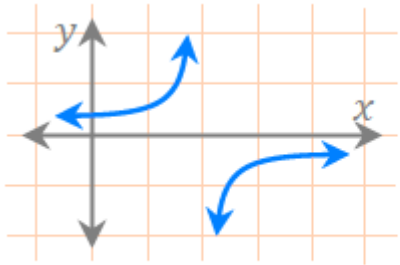
C



D

08/16

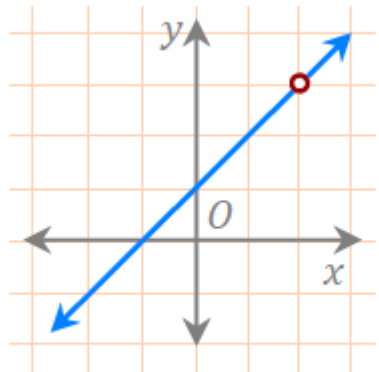
ما قيمة x التي عندها الدالة غير معرفة؟



(A) 0
(B) 1
(C) 2
(D) 3

09/16

إذا كان التمثيل البياني يُمثل $f(x)$ فأي التالي يُعبر عن الدالة؟



Ⓐ $\frac{x^2-x-6}{x-3}$

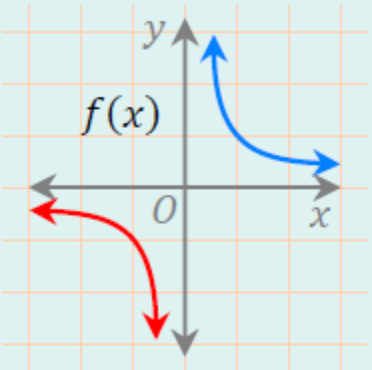
Ⓑ $\frac{x^2-x-6}{x+2}$

Ⓒ $\frac{x^2-x-2}{x+2}$

Ⓓ $\frac{x^2-x-2}{x-2}$

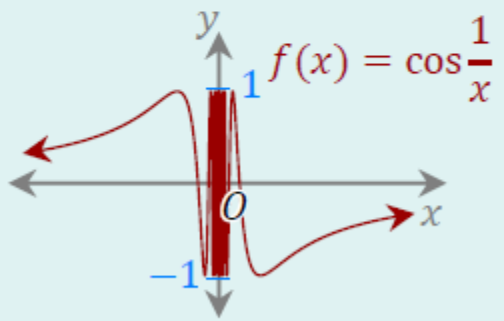
النهايات وسلوك الدالة

النهايات والسلوك غير المحدد: إذا زادت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$

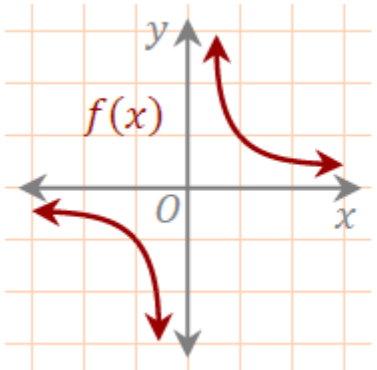


وإذا نقصت قيم $f(x)$ بشكل غير محدود عند اقتراب x من العدد c فإن $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$.

النهايات والسلوك التذبذبي: إذا كانت قيم $f(x)$ تتذبذب بين قيمتين مختلفتين باقتراب قيم x من c فإن $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة.



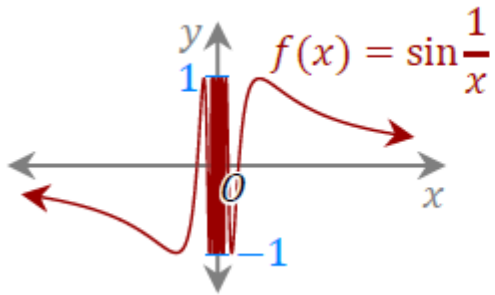
10/16 في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to 0} f(x)$ بـ ..



Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ $+\infty$ Ⓓ غير موجودة

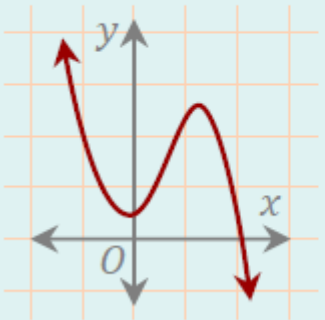
11/16 في الشكل نُقدِّر $\lim_{x \to 0} f(x)$ بـ ..



Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ $+\infty$ Ⓓ غير موجودة

النهايات وسلوك طرفي التمثيل البياني



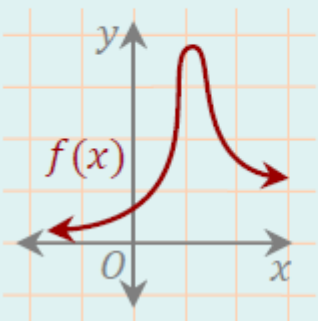
◄ سلوك الطرف الأيمن ..

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty$$

◄ سلوك الطرف الأيسر ..

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$$

◄ **فـائـدة:** من الممكن أن يقترب الطرف الأيمن أو الطرف الأيسر لبعض الدوال من عدد حقيقي.



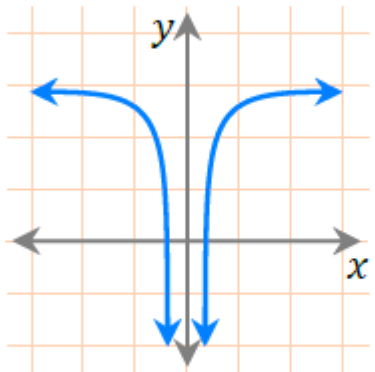
◄ سلوك الطرف الأيمن ..

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 1$$

◄ سلوك الطرف الأيسر ..

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

أي التالي يصـــف ســـلوك طرفي التمثيل البياني للدالة $f(x)$ ؟



(A) $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

(B) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty$

(C) $\lim_{x \to \infty} f(x) = 3 \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = 3$

(D) $\lim_{x \to \infty} f(x) = -4 \ , \ \lim_{x \to -\infty} f(x) = -4$

حساب النهايات جبريًا

- **نهايات الدوال الثابتة ..**

$\lim_{x \to c} k = k$ فمثلًا $\lim_{x \to -3} 5 = 5$

- **نهاية الدالة المحايدة ..**

$\lim_{x \to c} x = c$ فمثلًا $\lim_{x \to 7} x = 7$

- **نهايات الدوال بشـــكل عام:** بالتعويض المباشـــر، فمثلًا ..

$$\lim_{x \to 4} (4x - 1) = 4(4) - 1 = 16 - 1 = 15$$

13/16

ما قيمة $\lim_{x \to 2}(x^2 - 3x + 1)$ ؟

Ⓐ -2

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ 2

14/16

$\lim_{x \to 5}(3x^3 - 5x^2 - 3x - 10)$ تساوي ..

(A) 125

(B) 225

(C) 275

(D) 235

15/16

ما قيمة $\lim_{x \to 0}(4^x - \cos x + 2x - 1)$ ؟

Ⓐ -2

Ⓑ -1

Ⓒ 1

Ⓓ 2

16/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-7x+6}{x-1}$ ؟

Ⓐ 4

Ⓑ 0

Ⓒ -2

Ⓓ -4

17/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{7}}{x-3}$ ؟

Ⓐ $3+\sqrt{7}$

Ⓑ $3-\sqrt{7}$

Ⓒ $\sqrt{7}-3$

Ⓓ 3

18/16

$\lim_{x \to -1} \frac{4-\sqrt{x^2+x+16}}{x^3-1}$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{1}{8}$

Ⓑ $\frac{1}{12}$

Ⓒ ∞

Ⓓ 0

الصيغة غير المحددة

- **الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$** : تنتج من التعويض المباشر لبعض نهايات الدوال النسبية.
- **طرق معالجة الصيغة غير المحددة $\frac{0}{0}$ ..**
  - نحلل البسط أو المقام أو كليهما، ثم نختصر العوامل المشتركة، فمثلًا ..

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \frac{1 - 3(1) + 2}{1 - 1} = \frac{0}{0}$$

نحلل البسط بالبحث عن عددين مجموعهما -3 وحاصل ضربهما $+2$ ، وهما -2 و -1 ..

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x - 2)(\cancel{x - 1})}{\cancel{x - 1}}$$
$$= \lim_{x \to 1} (x - 2)$$
$$= 1 - 2 = -1$$

  - نضرب كلًا من البسط والمقام بمرافق البسط للتخلص من الجذر التربيعي في البسط، أو بمرافق المقام للتخلص من الجذر التربيعي في المقام.
  - **للتذكير:** مرافق $\sqrt{x} + 3$ هو $\sqrt{x} - 3$ ، وحاصل ضربهما $x - 9$ (تربيع الأول - تربيع الثاني).

$$x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$$

19/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$ ؟

Ⓐ 0

Ⓑ 6

Ⓒ 4

Ⓓ 8

20/16 $\lim_{x \to 0} \frac{(x+3)^2-9}{x}$ تساوي ..

Ⓐ 0 Ⓑ 3

Ⓒ 6 Ⓓ غير موجودة

21/16

$\lim_{x \to 9} \frac{\sqrt{x}-3}{x-9}$ تساوي ..

Ⓐ $\frac{1}{9}$

Ⓑ $\frac{1}{6}$

Ⓒ 0

Ⓓ غير موجودة

22/16 ◀ ما قيمة b التي تجعل $f(x)=\frac{x^2-bx+4}{x-4}$ متصـــلة عند $x=4$ بعد إعادة تعريفها؟

Ⓐ 2 Ⓑ 5

Ⓒ 6 Ⓓ 8

نهايات الدوال عند المالانهاية

- **أهم خصائص** $+\infty$ **و** $-\infty$ ..
  - إذا أضـــفنا إليهما أو طرحنا منهما أي عدد فإنهما **لا يتغيران**.
  - إذا ضربناهما أو قسمناهما على أي عدد عدا الصفر فإنهما **لا يتغيران**، لكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات.
  - إذا قسمنا أي عدد عليهما يكون الناتج **صفرًا**.
  - إذا رفعناهما لأس سالب يكون الناتج **صفرًا**.
  - إذا رفعناهما لأس موجب فإنهما **لا يتغيران**، لكن تنطبق عليهما قواعد الإشارات.
- **نهايات دوال كثيرات الحدود عند المالانهاية:** نعوض تعويضًـــا مباشـــرًا في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) فقط ..

$$\lim_{x \to \infty} (4x^6 + 3x^5) = \lim_{x \to \infty} 4x^6 = 4(\infty)^6$$
$$= 4(\infty) = \infty$$

23/16 $\lim_{x \to \infty} (x^2 + x + 2)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 1 Ⓓ ∞

$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 2x^2 + 5x - 1)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $+\infty$

25/16 ◀ $\lim_{x \to -\infty} (4x^6 + 3x^5 - x)$ تساوي ..

Ⓐ $-\infty$ Ⓑ 0

Ⓒ 2 Ⓓ $+\infty$

نهايات الدوال النسبية عند المالانهاية

- نعوض تعويضًا مباشرًا في الحد الرئيس (الحد ذي القوة الأكبر) فقط في كل من البسط والمقام.
- إذا كانت درجة البسط تساوي درجة المقام ..

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-7x^2+1}{3x+2x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{-7\cancel{x^2}}{2\cancel{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-7}{2}=\frac{-7}{2}$$

- **عمومًا:** النهاية تساوي $\frac{\text{المعامل الرئيس للبسط}}{\text{المعامل الرئيس للمقام}}$
- إذا كانت درجة البسط أصغر من درجة المقام ..

$$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2-1}{x^6+4}=\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2}{x^6}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^4}$$

$$=\frac{5}{(\infty)^4}$$

$$=\frac{5}{\infty}$$

$$=0$$

- **عمومًا:** النهاية تساوي الصفر.

إذا كانت درجة البسط أكبر من درجة المقام ..

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5+7}{2x^4-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^5}{2x^4}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-3x}{2}$$

$$=\frac{-3(\infty)}{2}$$

$$=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+7}{2x^4-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5}{2x^4}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{2}$$

$$=\frac{-3(-\infty)}{2}$$

$$=\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5+7}{2x^3-1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^5}{2x^3}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x^2}{2}$$

$$=\frac{-3(-\infty)^2}{2}$$

$$=-\infty$$

26/16 ◀ النهاية $\lim_{x \to \infty} \frac{3x-1}{2x+5}$ تساوي ..

Ⓐ $-\frac{1}{5}$ Ⓑ 0

Ⓒ $\frac{3}{2}$ Ⓓ ∞

27/16 ◀ $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^4-2}{5x^4+3x^3-2x}$ تساوي ..

Ⓐ 10

Ⓑ 5

Ⓒ 2

Ⓓ 0

28/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{10x^3 - 12x}{5 + 3x^2 - 2x^3}$ ؟

(A) -5

(B) -2

(C) 2

(D) 5

29/16 ◀ إذا كان $\lim_{x \to \infty} \frac{Ax}{3+|x|} = 2$ فما قيمة A ؟

Ⓐ 6

Ⓑ 2

Ⓒ -2

Ⓓ -6

30/16 ◀ $\lim_{n \to -\infty} \frac{4}{n^3+2}$ تساوي ..

Ⓐ -4

Ⓑ 0

Ⓒ 2

Ⓓ 4

31/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-8}$ ؟

Ⓐ $-\infty$

Ⓑ 0

Ⓒ 1

Ⓓ ∞

32/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2-4}{x-2}$ ؟

Ⓐ -4

Ⓑ 0

Ⓒ 4

Ⓓ ∞

33/16 ◀ ما قيمة $\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{x-4}$ ؟

Ⓐ $-\infty$

Ⓑ 0

Ⓒ 2

Ⓓ ∞

34/16 ◀ $\lim_{x \to -\infty} \frac{7x^3+1}{x^2+4x}$ تساوي ..

Ⓐ 7

Ⓑ $\frac{7}{4}$

Ⓒ $-\infty$

Ⓓ $+\infty$